拡張した DFA を用いた覆面算の解析に関する研究

著者	野崎 裕樹
雑誌名	東北大学電通談話会記録
巻	87
号	1
ページ	304-305
発行年	2018-08
URL	http://hdl.handle.net/10097/00123554

修士学位論文要約（平成30年3月）

拡張したDFAを用いた覆面算の解析に関する研究

野崎 裕樹
指導教員：篠原 歩

Enumeration of alphametics using extended deterministic finite automaton

Yuki Nozaki
Supervisor: Ayumi SHINOHARA

Alphametic is a mathematical puzzle. Players are given a mathematical formula consisting of letters rather than numerals, and try to find the right substitution of numerals for letters that makes the formula hold true. A preceding study has proposed a method using DFAs for analyzing alphametics. In this paper, we propose a more efficient method to construct DFAs and to reduce the number of DFA states. We also describe a method which derives a general term formula of the number of alphametic and show general term formulas for the binary and ternary number systems.

1.　はじめに

覆面算は，計算式の 0〜9 の各数字がそれぞれ別の記号に置き換えられた形で与えられたとき，どの記号がどの数字に対応するかを推測し，元の完全な計算式を満たすパズルである．本研究では，Eppstein[1)] によって提案された，覆面算の基数を 10 から一般の整数 k に拡張した問題を扱い，3 項の加算の覆面算に対象を限定する．図 1 は覆面算と解の例である．覆面算が与えられ，計算式を満たす記号に対応する数字が存在したとき，その覆面算を解を持つ覆面算と呼ぶ．本研究の最終目標は，任意の桁数に対して k 進法の下で解を持つ覆面算を数え上げ，数独プロジェクト [2)] のように覆面算の列挙を行うことである．

		s	e	n	d		9	5	6	7
+		m	o	r	e	+	1	0	8	5
	m	o	n	e	y	1	0	6	5	2

図 1. 覆面算の例と解

桁数 n の覆面算が与えられたとき，その覆面算が k 進法の下で解を持つかの判定を有限オートマトン (DFA) を用いて判定する手法が提案されている [3)]．この手法では，解を持つ覆面算が満たすべき複数の条件を判定する DFA をそれぞれ個々に作りそれらの積を取ることにより DFA を構築する．しかしながら，k が大きくなるにつれ個々の DFA の状態数が増加し，積を取る際に構築時間が増加し $k \leq 4$ までしか構築できなかった．

本論文では，複数の条件を判定するための情報を DFA の各状態で管理することにより解を持つ覆面算を判定する DFA を直接構築する．これにより，先行研究と比較して高速に DFA の構築が可能となる．実際に，$k \leq 7$ までの DFA の構築を可能とした．また，構築された DFA を走査することによる，覆面算の数え上げ，列挙手法を提案する．特に $k = 2$ と $k = 3$ のとき，解を持つ覆面算を桁数 n に関する陽関数として導出することに成功した．

2.　定義

要素数 $k \in \mathbb{N}$ の順序付き文字の集合を Σ_k と表す．$\mathbb{N}$ は，自然数の集合を表す．0 から $k-1$ までの数字の集合を N_k と表す．任意の N_k^* の要素である数字列を，k 進数の数と解釈する．

定義 1 (k 進数-覆面算)**.** 系列 $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma_k^*$ に対して，w_i を項と呼び，$A = (w_1, w_2, w_3)$ を **k 進数-覆面算**と呼ぶ．

定義 2 (覆面算の解)**.** 写像 $\pi : \Sigma_k \to N_k$ を拡張し，Σ_k^* の要素の文字列を数字列に置き換える準同型写像を $\hat{\pi} : \Sigma_k^* \to N_k^*$ と表す．

k 進数-覆面算 A が与えられたとき，次の条件を満たす部分写像 $\pi : \Sigma_k \rightarrowtail N_k$ を k 進数-覆面算 A の**解**と言う．

(1) $\hat{\pi}(w_1) + \hat{\pi}(w_2) = \hat{\pi}(w_3)$ が成立．
(2) w_i の先頭の文字 $w_{i,t}$ が，$\pi(w_{i,t}) \neq 0$ を満たす．

定義 3 (覆面算系列)**.** 覆面算の各項 w_i の上位桁に

$\$ \notin \Sigma_k$ を必要なだけ補い w_i の長さを揃え，もう1つずつ記号 $\$$ を追加した3つ組を等項長覆面算と呼ぶ．$w_{i,j}$ を等項長覆面算の i 項, 下位桁から j 桁目の記号としたとき，$w_{1,1}, w_{2,1}, w_{3,1}, w_{1,2}, ..., w_{n,3}$ を**覆面算系列**と呼ぶ．

定義 4 (正規化された覆面算系列)**.** 覆面算系列の新しい文字の出現順序が辞書順のとき，その覆面算系列は**正規化**されているという．

3.　覆面 DFA の構築および圧縮

3.1　覆面 DFA の構築

k 進数-覆面算系列を入力とし，解を持つ k 進数-覆面算系列を受理する **覆面 DFA** $M = (Q, \Sigma_M^3, \delta, q_0, F)$ の構築方法について述べる．ここで，$\Sigma_M = \Sigma_k \cup \{\$\}$ である．覆面 DFA は，$j-1$ 桁目まで解を持つ覆面算系列の接頭辞であることを前提に，j 桁目の遷移文字を読んでなお解を持つ覆面算系列の接頭辞になりうるときのみ次の状態へ遷移させ，最後に $\$\$\$$ を読み覆面算系列を受理する．解を持つ覆面算系列とは次の条件をみたす系列である．

1. 覆面算に直したとき計算式の形をしている．
2. 正規化されている．
3. 加算が成立する．

各状態で，保持する情報は以下の D, ℓ, P である．

- $D \in \{\$, \neg\$\}^2$ は，各項にすでに $\$$ が出現しているかどうかを表現する．上記の条件1に違反するためその判定に用いる．
- $\ell \leq k$ は，遷移文字に使うことのできる文字の種類数を表す．上記の条件2の判定に用いる．
- P は5つ組 (π, c, z_1, z_2, z_3) を要素として持つ空でない集合である．$\pi : \Sigma_K \to N_k$ は可能な割当であり，$c \in \{0, 1\}$ は f の下での繰り上がりの有無，z_i は第 i 項の直前の文字が0に割り当てられているか，を表現する．上記の条件3の判定のために用いる．

3.2　覆面 DFA の圧縮

定義 5 (置換同値な2状態)**.** $\phi : \Sigma_k \to \Sigma_k$ とする．覆面 DFA の状態 q が持つ $(\pi, c, z_1, z_2) \in P$ に関して，$\phi(P) = \{(\phi \circ \pi, c, z_1, z_2) | (\pi, c, z_1, z_2) \in P\}$ と定義する．覆面 DFA 中の2状態 q と q' について，$D = D'$，$\ell = \ell'$，$P = \phi(P')$ を満たす ϕ が存在するとき q，q' を**置換同値な2状態**という．

定義 6 (置換圧縮 DFA)**.** 全ての置換同値な2状態をまとめた覆面 DFA を**置換圧縮覆面 DFA** と呼び，$(Q_k, \Delta_k, \delta_{state}, \delta_{perm}, q_0, F)$ と表す．$q \in Q_k, x \in \Delta_k$ としたとき，$\delta : Q_k \times \Pi_k \times \Delta_k \to Q_k \times \Pi_k$ を次のように定義される．

$$\delta(q, \phi, x) = (\delta_{state}(q, \phi(x)), \delta_{perm}(q, \phi(x)) \circ \phi)$$

ただし，$\phi \circ \phi'$ は合成写像を表す．$u \in \Delta_k^*, x \in \Delta_k$ としたとき，置換圧縮覆面 DFA の遷移は帰納的に表現される．

$$\delta^*(q, \phi, \epsilon) = (q, \phi)$$
$$\delta^*(q, \phi, ux) = \delta(q', \phi', x) \text{ ただし } (q', \phi') = \delta^*(q, \phi, u)$$

表1に覆面 DFA，置換圧縮覆面 DFA の構築結果を示す．

表1．覆面 DFA の状態数

進数 k	2	3	4	5	6	7
先行研究	243	1180	307233	-	-	-
覆面 DFA	28	110	859	10267	370719	30909627
置換圧縮覆面 DFA	15	27	163	1084	20240	582966

表2．覆面算の数の一般項 $F_k(n)$

進数 k	$F_k(n)$
2	$3 \times 2^{n-2}(2^{n-1} - 1)$
3	$-3^{n-1} - 2 \times 5^{n-1} + 4 \times 9^{n-1}$

4.　覆面算の数え上げ・列挙

覆面 DFA をグラフとしてみたなしたとき，その隣接行列を用いることにより解を持つ覆面算の数え上げが可能である．特に，$k = 2$，$k = 3$ のとき，桁数 n に関する陽関数を導出した．

表2に解を持つ覆面算の数に関する陽関数を示す．

5.　まとめ

本論文では解を持つ覆面算を受理する DFA の構築方法と，解を持つ覆面算の数の陽関数の導出方法について述べた．DFA の構築は先行研究 [3] と比較し，より大きな kk に対しても DFA の構築を可能とした．また DFA を解析することにより覆面算の数え上げを可能とし，$k = 2$ と $k = 3$ について陽関数を導出した．

文献

1) David Eppstein. On the NP-completeness of cryptarithms. *Computer Science Department*, 2000.
2) 井上真大, 奥乃博. 本質的に異なる数独解盤面の列挙と番号付け. 情報処理学会第71回全国大会, Vol. 5, p. 6, 2009.
3) 遠藤洋, 成澤和志, 篠原歩. 覆面算を解析するためのオートマトン理論的アプローチ. ゲームプログラミングワークショップ 2011 論文集, Vol. 2011, No. 6, pp. 54–61, 2011.